الثلاثاء 2017/10/10

المحاضرة الثانية

- المجموعة المرتبة كلياً هي مجموعة مرتبة جزئياً والعكس ليس صحيح بالضرورة.
- = = كل عناصرها مرتبطة مع بعضها . مثل مجموعة الأعداد الطبيعية مع علاقة أصغر أو يساوي.

مثال 1: لدينا المجموعة $E = \{1,2,3\}$ ولنأخذ قوة هذه المجموعة

$P(E) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, E\}$

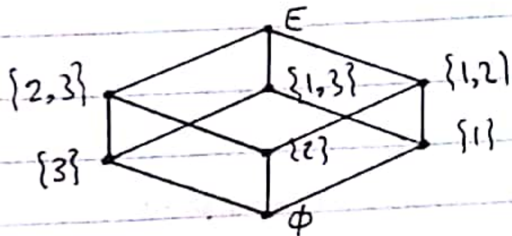
نعرف على هذه القوة علاقة $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$

هل هذه العلاقة هي علاقة ترتيب؟

علاقة الاحتواء في المجموعات متعدية.

$(P(E), \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

* ارسم مخطط هاس لهذه المجموعة المرتبة جزئياً.



مثال 2:

لتكن لدينا المجموعة $X = \{a_1, a_2\}$

ولتكن لدينا $P = \{\phi, \{a_1\}\}$ ، $Q = \{\phi, \{a_2\}\}$ ولنعرف $P \times Q$ الجداء الديكارتي

$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \subseteq a_2 \wedge b_1 \subseteq b_2$. المطلوب:

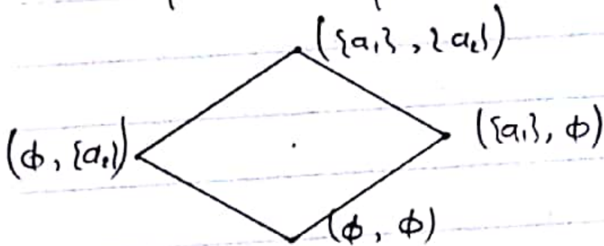
أوجد الجداء الديكارتي $P \times Q$ وبين أن $(P \times Q, \subseteq)$ مرتبة جزئياً

ثم ارسم مخطط هاس لها.

الحل:

$P \times Q = \{(\phi, \phi), (\phi, \{a_2\}), (\phi, \{a_1\}), (\{a_1\}, \{a_2\})\}$

$(P \times Q, \subseteq)$ مرتبة جزئياً



العناصر الأعظمية والعناصر الأصغرية:

تعريف: لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً . عندئذٍ:

1- إذا كان يوجد في E عنصر مثل g بحيث يحقق $x \leq g \; ; \; \forall x \in E$

فإن g يسمى عنصراً أكبراً لـ E

2- إذا كان يوجد في E عنصر مثل l بحيث يحقق $l \leq x \; ; \; \forall x \in E$ فإن

l يسمى عنصراً أصغراً لـ E .

/ /

مثال: $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ الأصغر هو ϕ ، الأكبر هو E

$(\{a_1\}, \{a_2\})$ (ϕ, ϕ)

تعريف 2: إذا كانت $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً ، عندها فإن:

1- إذا كان يوجد في E عنصر مثل m بحيث أنه لا يوجد في E عنصر x يحقق العلاقة $m \leq x$ & $m \neq x$

فإننا في هذه الحالة نسمي m عنصراً أعظمياً في E.

2- إذا كان يوجد في E عنصر مثل n بحيث أنه لا يوجد في E أي عنصر x يحقق الشرط $x \leq n$ & $x \neq n$

فإننا في هذه الحالة نسمي n عنصراً أصغرياً في E.

مبرهنة: إذا كانت E مجموعة منتهية ومرتبة جزئياً فإنها تحوي حتماً على عنصراً أعظمي واحد على الأقل. وكذلك على عنصر أصغري واحد على الأقل.

ملاحظات: 1- إذا كانت E مجموعة غير منتهية فقد تحوي على عناصر أصغرية أو أعظمية أو قد لا تحتوي على أي منها.

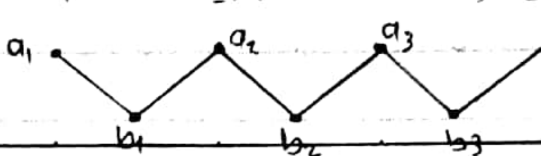
2- إذا كان p عنصر غير متقارن مع أي عنصر آخر من E فإن p هو عنصر أصغري وهو عنصر أعظمي في الوقت نفسه

3- العنصر الأكبر من المجموعة المرتبة جزئياً هو عنصر أعظمي فيها و العنصر الأصغر في المجموعة المرتبة جزئياً هو عنصر أصغري ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة

مثال: 1- المجموعة $E = \{2, 3, 4, 9\}$ مجموعة مرتبة جزئياً بعلاقة القسمة.

العناصر الأعظمية هي $4, 9$ ، والعناصر الأصغرية هي $2, 3$

* أوجد العناصر الأصغرية والعناصر الأعظمية في المجموعة المرتبة جزئياً الممثلة بمخطط هاس التالي:



الأصغرية: $b_1, b_2, b_3, \dots$

الأعظمية: $a_1, a_2, a_3, \dots$

/ /

المجموعات الجزئية المحدودة:

تعريف 3: لتكن $(E,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً، ولتكن $A \subseteq E$ مجموعة جزئية منها عندئذ:

1- إذا كان يوجد في E عنصراً مثل s بحيث يكون $\forall x \in A \; ; \; x \leq s$

فإننا في هذه الحالة نسمي s حداً أعلى للمجموعة A في E.

2- إذا كان يوجد في E عنصراً مثل t بحيث يكون $\forall x \in A \; ; \; t \leq x$ فإننا في هذه الحالة نسمي t حداً أدنى للمجموعة A في E.

مثال: المجموعة $A = \{2,3,4,9\}$ مجموعة مرتبة جزئياً بعلاقة القسمة وهي مجموعة جزئية من المجموعة $(N,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

الحد الأدنى هو الواحد والحد الأعلى هو 36 أصغر الحدود العليا

تعريف 4: لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة E حيث $(E,\leq)$ مرتبة جزئياً.

نقول عن العنصر s من E أنه حد أعلى أصغري لـ A إذا حقق الشرطين التاليين:

1- s حد أعلى لـ A في E

2- s أصغر الحدود العليا. أي أنه إذا وجد s' حد أعلى آخر لـ A في E فإن $s \leq s'$

في هذه الحالة نكتب $\boxed{\sup A = s}$

كما نقول أن العنصر t من E أنه حد أدنى أعظمي لـ A إذا حقق الشرطين التاليين:

1- t حد أدنى لـ A في E.

2- t أكبر الحدود الدنيا، أي أنه إذا وجد t' من E هو حد أدنى آخر لـ A في E فإن $t' \leq t$. نكتب في هذه الحالة $\boxed{\inf A = t}$

ملاحظة: ليس من الضروري أن يكون للمجموعة A من E حد أدنى أعظمي أو حد أعلى أصغري وإذا وجد أي منهما فقد ينتمي إلى E وقد لا ينتمي.

- نسمي المجموعة المرتبة كلياً مجموعة مرتبة جيداً إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية منها تحتوي على عنصر أصغر.

/ /

مثال ١: مجموعة الأعداد الطبيعية N تحت علاقة الترتيب الطبيعي هي مجموعة مرتبة جيداً.
في حين أن مجموعة الأعداد الصحيحة تحت علاقة الترتيب نفسها هي علاقة غير مرتبة جيداً.

مثال ٢: $(\mathbb{R}, \leq)$ حيث $\leq$ الترتيب الطبيعي.
لتكن $A = \{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \; ; \; n \in \mathbb{Z}^+\}$
أوجد $\sup$ ، $\inf$ لهذه المجموعة.

الحل: $\sup A = 1$, $\inf A = 0$

الثلاثاء 2017/10/17 المحاضرة الثالثة

المورفيزم والإيزومورفيزم الترتيبيان:

تعريف ١: إذا كانت f دالة من المجموعة المرتبة جزئياً $(M, \leq)$ في المجموعة المرتبة جزئياً $(M', \leq')$. نقول عن هذه الدالة $f: (M, \leq) \longrightarrow (M', \leq')$
أنها مورفيزم ترتيبي (دالة تزايدية) إذا كان

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq' f(y) \quad : \forall x,y \in M$$

وإذا كانت بالإضافة إلى ذلك f تبايني و f^{-1} مورفيزم ترتيبي فإننا نسمي f في هذه الحالة إيزومورفيزم ترتيبي.

٢- ونقول عن الدالة السابقة f أنها مورفيزم عاكس للترتيب (دالة متناقصة) إذا تحقق الشرط

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq' f(y) \quad : \forall x,y \in M$$

وبالإضافة إلى كون f عاكس للترتيب، كان f متبايناً و f^{-1} مورفيزم عاكس للترتيب فإننا نسمي f عندئذٍ إيزومورفيزم عاكس الترتيب.

تمرين: لتكن f دالة معرفة بالشكل $f: (\mathbb{R}, \leq) \longrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$

$$f(x) = x^3 + 1 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

بين أن f هو إيزومورفيزم ترتيبي.